*Relime Vol. 3, Núm. 2, julio, 2000, pp.207-230*

# Construcción de gráficos de funciones: "Continuidad y prototipos"

**Margarida Fabra Lasalvia** *
**Jordi Deulofeu Piquet** *

## RESUMEN

En el marco del pensamiento matemático avanzado y dentro del tema funciones y gráficas, desarrollamos investigaciones centradas en las ideas y realizaciones del alumnado de secundaria (16-18 años). Analizamos las respuestas dadas por 250 estudiantes en dos momentos diferentes (inicio y mediados de curso) a la misma tarea de construcción del gráfico de una función dada a través de condiciones expresadas en forma verbal y que representa una situación descontextualizada. La finalidad principal de este trabajo es la aportación de nuevos conocimientos sobre los razonamientos que utilizan y las estrategias que aplican, así del cambio (evolución) de dichos razonamientos y estrategias en lo que se refiere al uso y abuso en la utilización de la continuidad y de los gráficos que corresponden a funciones elementales: prototipos, como rectas, parábolas e hipérbolas.

## ABSTRACT

In the frame work of Advanced Mathematical Thinking and related to Functions and Graphics topic, we are developing different focused on secondary students (16-18 years) ideas and performance. The main goal of our work is to improve knowledge about students reasoning and strategies used on solving tasks related with graph construction. We analyze 250 students' answers, in two instants (beginning and middle of a course), at a same task of graph construction of a function given by verbal conditions representing a non contextualized situation. We look especially for the use of continuos graphs (versus non continuos ones), for the use of prototypes like straight lines and parabolic and hyperbolic lines. We look also for the changes (evolution) on those uses.

## RÉSUMÉ

Dans le cadre de l' "Advanced Mathematical Thinking" et au sujet de fonctions et graphiques, nous développons différentes centrées sur les idées et les performances d'élèves de secondaire (16-18 ans). Nous étudions les réponses de 250 garçons et filles ont donnée en deux moments différents (début et vers le milieu du cours), à la même tache de construction d'un graphique d'une fonction qui représente une situation non contextualisée, donnée au moyen de conditions exprimées sous forme verbale. L'objectif principal consiste à apporter de nouvelles connaissances sur la pensée des élèves, en particulier sur les raisonnements et les stratégies qu'utilisent essentielment pour ce qui faut a la continuité et a l'utilisation de prototypes(rectes, paraboles et hiperboles) en leurs grafiques et egalément, le changement (évolution) de ceux aspectes en leurs constructions.

## RESUMO



## 1. PRESENTACIÓN DEL TEMA Y OBJETIVOS

El trabajo que presentamos es una investigación sobre el aprendizaje de diferentes aspectos relacionados con el concepto de función, realizada con estudiantes de dos niveles distintos (3º de BUP: Bachillerato Unificado Polivalente y COU: Curso de Orientación Universitaria, con edades de 16 a 18 años. El 3º de BUP es el nivel anterior a COU, y son los dos cursos que preceden a la entrada a la universidad). La finalidad principal de la investigación es la aportación de nuevos conocimientos sobre el pensamiento del alumnado, en concreto sobre los razonamientos que utilizan y las estrategias que aplican los estudiantes

* Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona, España.

para resolver cuestiones relacionadas con la construcción de gráficos cartesianos, especialmente cuando las funciones representan situaciones descontextualizadas, es decir, situaciones teóricas que no responden a un contexto real.

En el currículum de Matemáticas de la educación secundaria, el estudio de las funciones ocupa un lugar importante en la instrucción, especialmente en la educación postobligatoria (16-18 años), donde se introducen los conceptos básicos para el desarrollo del cálculo y se trabaja entre otros aspectos, la representación gráfica de funciones. No obstante, en la mayoría de los casos no se plantean secuencias didácticas dirigidas a la elaboración paulatina de los numerosos conceptos relacionados con las funciones y al manejo simultáneo de los distintos lenguajes de representación de una función, sino que lo que generalmente se hace, es proporcionar al alumnado un conjunto de técnicas que permitan resolver ejercicios y problemas estandarizados, olvidando una realidad contextualizada (situaciones concretas), la importancia del modo y el momento de presentar lo que se enseña y las situaciones y otros aspectos que acompañan (la existencia y valoración del currículum oculto) al carácter global de las experiencias matemáticas. Sin embargo, si se actúa además de modo que el trabajo que se realice y los métodos que se usen se adaptan y varían en función de las capacidades, las necesidades y la disposición del alumnado, evitaremos la creación de un cuerpo de conocimiento inamovible y sobrehumano, que contribuye a la desmotivación y a la insatisfacción que se siente hacia las Matemáticas.

En concreto, la representación de funciones todavía se reduce (por lo menos en nuestro país), al trazado de la gráfica de una función dada su expresión algebraica, representación que se hace siguiendo unos pasos previamente determinados (puntos de corte, determinación de extremos, asíntotas, tendencias, etc.), utilizando técnicas relativas al cálculo de límites y derivadas y tratando de algoritmizar el paso del lenguaje algebraico al gráfico. Nuestra propuesta de instrucción se fundamenta en la acción interactiva, diseñar situaciones que den cuerpo a los contenidos propiamente matemáticos, estructurados mediante una red de interconexión de los conceptos, las habilidades técnicas y las estrategias generales. En el tema que nos ocupa, nuestra opción consiste en la utilización del lenguaje gráfico como núcleo para el desarrollo del tema de funciones, y siempre que sea posible utilizar más de un lenguaje a la vez y hacer el paso de un lenguaje a otro (interpretación, construcción, fórmula...). Además, consideramos importante, dar una información sobre funciones lo antes posible dentro de la enseñanza secundaria para poder realizar un trabajo cualitativo previo a la enseñanza formal, imprescindible para una verdadera adquisición de los conceptos. Aún en edades entre los 16-18 años abordamos el tema de funciones revisando sus características cualitativamente.

El ***objetivo*** del trabajo es el estudio efectuado entre el alumnado de secundaria (16-18 años), a las respuestas dadas en dos momentos diferentes (al comienzo: 1ª C y a la mitad del curso: 2ª C) a la tarea de construcción del gráfico de una función que representa una situación descontextualizada y expresada a través de condiciones dadas en forma verbal, atendiendo fundamentalmente a la continuidad y utilización de prototipos.

Cabe destacar también que en los objetivos generales de nuestro estudio, en el que se prescinde de esquemas previos de interpretación de resultados, se pretende, entre otras cosas, averiguar las dificultades propias del graficar, frente a otras tareas y distinguirlas de las que guardan cierta relación con la opción de enseñanza utilizada.

## 2. MARCO TEÓRICO

El trabajo se enmarca en el pensamiento matemático avanzado (Dreyfus, 1990) y, concretamente, dentro del campo de funciones y gráficas. Como señala este autor, uno de los campos de investigación actual se centra en el estudio de las dificultades que se presentan en el alumnado en procesos ligados a la visualización, tanto a los que se refieren a la interpretación que se hace a través de un gráfico de los distintos subconceptos ligados al concepto de función, como al proceso de interpretación del conjunto de informaciones dadas en forma gráfica. Bajo este marco teórico analizamos las tareas con toda su complejidad, tratando por separado las dificultades propias de determinadas informaciones o condiciones del enunciado

Tomamos, entre otras, como referencias significativas: Leinhard et. al. (1990), donde se revisan de manera exhaustiva las investigaciones sobre funciones centradas en el lenguaje gráfico; los trabajos de Tall (1991, 1995, 1996), sobre la visualización así como algunas conclusiones de los estudios; de Deulofeu (1993) sobre el significado del gráfico en alumnado de 12 a 14 años y de

Fabra (1995, 1997) y Fabra & Deulofeu (1996) sobre interpretación, construcción y relaciones en el binomio interpretación-construcción centradas en las ideas y realizaciones del alumnado de secundaria entre las edades de 16 y 18 años.

Siguiendo a Leinhard et. al. (1990), entendemos por *construcción,* aquella acción en la que el alumnado debe generar una cosa nueva. Hay que tener en cuenta que, mientras una interpretación no requiere ninguna construcción, una construcción se apoya a menudo en algún tipo de interpretación (acción en la que el alumnado obtiene significado o información a través de un lenguaje determinado).

La utilización de cualquier lenguaje de representación implica el conocimiento de diversas cuestiones propias de cada lenguaje que tienen una gran incidencia en las dificultades de su propio aprendizaje, constituyéndose a veces en un obstáculo para su desarrollo. En el caso del lenguaje gráfico le corresponden desde todos aquellos aspectos relacionados con los ejes cartesianos (magnitudes, graduación,....), hasta características como linealidad, continuidad..., y la utilización de prototipos elementales, tan importantes en tareas de interpretación y/o de construcción.. Leinhard et. al. (1990) constatan que los tramos rectos figuran como respuesta a la necesidad de unir puntos y en el mismo orden Fabra-Deulofeu (1995, 1996, 1997) constatan que los tramos de parábolas e hipérbolas figuran como respuesta a la necesidad de unir puntos de forma más elaborada y respetar extremos relativos y tendencias.

La literatura contiene numerosos ejemplos que muestran les dificultades del alumnado en la interpretación y construcción de gráficos. Janvier (1987) considera que algunos de los errores detectados se deben a confusiones (contaminaciones) entre diferentes representaciones, debidas a la transferencia de las características de una representación a otra. En concreto, las confusiones más relevantes son: *la confusión gráfico-dibujo, la confusión verbal-gráfico, la confusión intervalo-punto.* Distingue también entre las confusiones visuales y las confusiones provocadas por la experiencia personal (*personal distractors*) que ciertamente pueden actuar simultáneamente haciendo más difícil la interpretación y/o construcción del gráfico. Otros autores como Azcárate (1990), Deulofeu (1993) han constatado también confusiones semejantes.

En otro nivel y en relación con la focalización de la atención del alumnado, Leinhard (1990) señala la importancia y la variedad de aspectos en que es posible centrar la atención; en particular, en tareas dentro del lenguaje gráfico.

La visualización, que juega un papel importante en el desarrollo de las estructuras cognitivas del alumnado y un papel esencial en el pensamiento matemático, también incluye la capacidad, habilidad y coherencia imaginativa suficiente para pasar de un lenguaje a otro e influye sobre el proceso de abstracción. En artículos recientes del grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education) han realizado diferentes investigaciones sobre el concepto de función y acerca de las dificultades del alumnado. Hitt (1996) (quien pertenece a este grupo), dirigió sus trabajos al análisis de respuestas dadas por el profesorado de Matemáticas, observando que en ellas la visualización permanecía en un nivel intuitivo primario, al no pasar a un nivel de abstracción superior. Por otra parte en otros cuestionarios sobre la construcción de funciones Hitt (1995) había observado en el profesorado tiene una marcada tendencia a construir funciones continuas. Cabe destacar también los trabajos sobre funciones de Monk (1992) utilizando modelos físicos. Con base en todo ello se resalta con mayor precisión que el concepto de función es un obstáculo epistemológico a la vez que cognitivo y didáctico.

La visualización ha estado generalmente considerada sólo como un soporte que ayuda a la intuición y formación del concepto en el aprendizaje matemático, pero desde hace pocos años, muchos matemáticos han reconocido la importancia del razonamiento visual no solo en el descubrimiento, sino también en la descripción y justificación de resultados. Rivald (1987) escribió un artículo *"Mathematicians are rediscovenng the power of pictorical reasoning"*, citado por Dreyffus (1991), título que pone por sí mismo de manifiesto la revalorización que está teniendo la visualización. Los argumentos visuales obtienen su máxima expresión cuando no se dispone de otras alternativas. Artigue (1990) propone un currículum sobre la resolución de ecuaciones diferenciales a niveles universitarios fundamentada en la visualización (por aproximación geométrica a través de los ordenadores) para evidenciar la claridad de ésta, aunque se disponga de otros métodos de resolución. A nuestro entender, visualizar siguiendo a Dreyffus (1991), es algo más que percibir; es elaborar argumentos (con dibujos o no), construcciones que sean aceptables como demostraciones en el sentido de Tall (1995) y otros.

En otro orden de cosas, tal como dicen Leinhard et al. (1990), decidir si un gráfico ha de ser representado de forma continua o no, no es una cuestión trivial. Janvier (1987) señala que la mayoría del alumnado, en la interpretación de cualquier gráfico cartesiano, tiende a centrarse en un número discreto de puntos, tanto si se trata de un gráfico discreto como continuo; esta tendencia a *discretizar* los gráficos es un obstáculo no solamente para la distinción entre discreto y continuo, sino también considerar el gráfico como un objeto, es decir, como una entidad conceptual por ella misma. La construcción del gráfico que mejor representa una función es uno de los problemas centrales abordados en nuestra investigación.

Las investigaciones, basadas en la programación, de Dubinski & Harel (1992), permiten afirmar que ésta favorece la internación de la acción en proceso y posteriormente la encapsulación de procesos en objetos, si bien la capacidad de transferencias a otros ambientes no es evidente.

En Cordero & Solís (1996), las actividades generan acciones orientadas a buscar comportamientos tendenciales de las gráficas conforman un tipo de problemas con entidad propia, inusual, que favorece una concepción global de las funciones en sí mismas, así el cálculo de los límites no es importante en sí, sino mas bien como un medio para variar los parámetros de la función. Por otra parte, a través de las funciones prototipo exploramos de qué manera, influyen la variación de los parámetros de las mismas en la gráfica de la función.

Cantoral & Reséndiz (1996) y Farfán & Albert (1996) abordan temas escolares en el contexto gráfico dando una visión alternativa en cuanto al uso de la tecnología en la enseñanza, considerando fundamental y consustancial en la Matemática, la noción de aproximación.

## 3. METODOLOGÍA

A partir de las consideraciones precedentes y de una propuesta para las PAAU (Pruebas de Acceso a la Universidad) de Barcelona, para la realización de la investigación, se diseñó un cuestionario que se pasó dos veces a lo largo del curso. Este consistía en la construcción del gráfico de una situación funcional descontextualizada, dada, no en forma algebraica, sino a partir de las características del mismo desglosadas en diversas condiciones en forma verbal.

### 3.1 Los tests y las entrevistas

Los tests nos permitieron realizar un diagnóstico de determinados aspectos relacionados con la construcción de gráficos descontextualizados, para después estudiar el cambio (evolución) y las relaciones entre las producciones del alumnado, dado que la misma tarea se utilizó en los dos tests: *Test de acción:* Construcción del gráfico a principios de curso. *Test de contraste:* Construcción del mismo gráfico a mediados de curso. El interés por elegir la descontextualización es doble, por una parte están las propuestas mayoritarias en los libros de texto y en los currícula, por otra parte, queremos evitar la influencia no siempre beneficiosa del contexto. **El enunciado** principal es:

Dibuja una de las posibles curvas que represente una función que verifica:
La curva corta al eje OX en los puntos (-2, 0) y (1, 0).
La curva tiende a $-\infty$ cuando $x$ tiende a 0.
La curva tiende a $+\infty$ cuando $x$ tiende a 2.
La curva tiende a 0 cuando $x$ tiende a $+\infty$ y a $-\infty$.
El punto (-2, 0) es un máximo.
Puede haber otros máximos o mínimos.

En los tests se hizo una selección de aquellos ítems más significativos para profundizar en determinados aspectos directamente relacionados con la construcción para utilizarlos en las entrevistas. Las **entrevistas** en nuestro trabajo tienen como objetivo general la **matización** y corroboración de las respuestas del alumnado obtenidas a través de los tests (partiendo de las caracterizaciones gráficas, y de su evolución) más que un instrumento de obtención de datos.

### La muestra y la submuestra

La muestra elegida para los tests escritos se distribuye entre los dos centros públicos (I.E.S.; Institutos de

Enseñanza Secundaria) y los niveles de 3º y COU de la siguiente forma:

| LA MUESTRA: Globalmente 250 alumnos (150 de 3º de BUP y 100 de COU) | |
|---|---|
| *I.E.S. nº 1* | *I.E.S. nº 2* |
| *24 +30 alumnos/as de 3º de letras* | *24 alumnos/as de 3º de letras* |
| *34 alumnos/as de 3º de ciencias* | *38 alumnos/as de 3º de ciencias* |
| *38 alumnos/as de COU* | *28+34 alumnos/as de COU* |
| *126 alumnos/as en 4 grupos* | *124 alumnos/as en 4 grupos* |

La submuestra de 28 alumnos y alumnas elegida para las entrevistas es una selección del alumnado de la muestra utilizando criterios de capacidad expresiva, los chicos y chicas entrevistados eran alumnos y alumnas medios pero capaces de argumentar el por qué de sus realizaciones.

| LA SUBMUESTRA: Globalmente 28 alumnos (18 de 3º y 10 de COU) | |
|---|---|
| *I.E.S. nº 1* | *I.E.S. nº 2* |
| *3+3 alumnos/as de 3º de letras* | *4 alumnos/as de 3º de letras* |
| *4 alumnos/as de 3º de ciencias* | *4 alumnos/as de 3º de ciencias* |
| *4 alumnos/as de COU* | *3+3 alumnos/as de COU* |
| *14 alumnos/as de 4 grupos* | *14 alumnos/as de 4 grupos* |

### La obtención de datos

El test de acción y la primera entrevista se realizaron antes de entrar en el tema de funciones y el test de contraste antes de trabajar la representación de funciones según la programación oficial (que se basa en el uso de derivadas) y sin haber tratado explícitamente cuestiones similares a las tareas propuestas. Finalmente la segunda entrevista se realizó al finalizar el tema de funciones.

| **LA OBTENCIÓN** | |
|---|---|
| *Test de acción:*<br>*La construcción (1ª vuelta)* | *Primer trimestre* |
| *1ª Entrevista:*<br>*sobre el test de acción* | *Segundo trimestre (inicio)* |
| *Test de contraste:*<br>*La construcción (2ª vuelta)* | *Segundo trimestre (finales)* |
| *2ª Entrevista:*<br>*sobre el test de contraste* | *Tercer trimestre* |

## 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para el análisis de las 250+250 construcciones, debemos tomar en cuenta el elevado número de elementos de información puestos en juego (un mínimo de 7) que son:

- Dos puntos de corte
- Un máximo explícito
- Dos discontinuidades
- Dos tendencias

Pueden aparecer, además, otros elementos necesarios como un mínimo relativo implícito, así como algunos "inventados" para resolver situaciones de discontinuidades o tendencias, máximos absolutos, mínimos relativos, gráficos no funcionales, etc., lo que hace, que exista un elevadísimo número de construcciones distintas y el análisis de todas ellas resulte una tarea difícil y altamente compleja. Por todo ello, hemos optado por presentar la evolución de las construcciones desde un punto de vista *macroscópico*, es decir, una macro - evolución fundamentada en la distinción de:

1. Gráficos continuos versus gráficos discontinuos

2. Gráficos que utilizan prototipos primarios o secundarios versus los que no utilizan prototipos.

Al analizar las producciones del alumnado observamos que algunas gráficas se reducían al trazado de rectas o segmentos, parábolas o hipérbolas, es decir, los gráficos de los modelos de función elementales conocidas por el alumnado. Por su primitivismo, puesto que entendemos que se trata primordialmente de representar el gráfico de la función propuesta a partir de alguno de los gráficos más elementales ya conocidos, ignorando, en gran parte, el enunciado, llamamos a estos gráficos **prototipos primarios**.

Por otro lado, observamos también que determinados gráficos consistían en la construcción de más de un prototipo primario, generalmente enlazados, o, en algún caso, cubriendo dominios distintos (dos parábolas, una parábola y una hipérbola,...). El hecho de utilizar varios prototipos primarios en un mismo gráfico, nos llevó a considerarlos como derivados de estos y llamarlos **prototipos secundarios**. A pesar de restringirse todavía al uso de prototipos, consiguen gráficos más elaborados y más cercanos al solicitado por el enunciado, cumpliendo ya con alguna condición más que en el caso anterior en que se utilizaba un solo prototipo primario. Esto supone, a nuestro entender, un conocimiento más amplio del uso de los prototipos, que les permite, a su vez, someter su utilización al deseo de cumplir con alguna condición del enunciado.

### 4.1 Descripción de las construcciones: los bloques continuos - discontinuos ( conti-disconti)

Hemos realizado el estudio de las 500 construcciones efectuando múltiples reducciones y procurando no perder información en cada una de ellas. En primer lugar, las situamos en 25 celdas correspondientes a una tabla de 5x5 donde describíamos los elementos más significativos, colocando en las filas el comienzo de los gráficos y en las columnas el resto de los elementos de cada construcción. En segundo lugar, de estos 25 tipos diferentes de construcciones se seleccionaron las 18 construcciones mayoritarias.

En relación con la continuidad, distinguimos unas agrupaciones que llamamos bloques. Existen seis bloques, tres continuos (bloques **conti**) y tres discontinuos (bloques **disconti**), que surgen de la especial relevancia de unas determinadas construcciones suficientemente diferenciadas entre sí que los constituyen y que a su vez les dan las formas gráficas que mostramos en la Figura 1, con unas frecuencias de aparición en porcentajes en la 1ª C y 2ª C, según el nivel 3º o COU, que mostramos en la Tabla 1. Los seis bloques (bloques conti - disconti) agrupados por su continuidad o discontinuidad son:

**Bloques continuos** ( bloques conti ): conti 0, conti 1 y conti 2.
**Bloques discontinuos** (bloques disconti): disconti 1, disconti 2 y disconti 3.

Pertenecer a uno u otro bloque nos informará, en primer lugar, por ser conti o disconti, de la continuidad o ausencia de continuidad, pero según el número, que mide la bondad del gráfico, se nos informará de la utilización o no de prototipos, así como de otros elementos relevantes como la inclusión o no del máximo explícito como relativo y de la incorporación o no del mínimo implícito, ya que principalmente, las características que diferencian los bloques entre sí son los distintos elementos que intervienen en ellos, nos referimos a la representación o no de los elementos de información puestos en juego en el enunciado, así:

**conti 0**: segmentos o parábolas que incluyen los dos, uno o ningún punto de corte.
**conti 1**: parábolas que incluyen los dos puntos de corte y a veces un máximo absoluto, en lugar del correspondiente máximo relativo.
**conti 2**: cúbicas que contemplan el máximo relativo y un mínimo inventado (para salvar la discontinuidad en $x$=0).
**disconti 1**: ramas de hipérbola que respetan una o las dos discontinuidades.
**disconti 2**: gráficos que contemplan el máximo relativo y una o las dos discontinuidades.
**disconti 3**: incluye además el mínimo implícito así como alguna o las dos tendencias cuando $x$ tiende a más (+) y a menos (-) infinito.

Los bloques conti 0, conti 1 y disconti 1 utilizan prototipos y no incluyen ni el máximo ni el mínimo. Los bloques conti 2, disconti 2 y disconti 3 no utilizan prototipos primarios e incluyen el máximo pero sólo el disconti 3 incorpora también el mínimo implícito.

*Tabla 1*. Frecuencias de aparición (%) de los bloques en 1ª C y 2ª C

| | *Tercero* | | *COU* | | *Total* | |
|---|---|---|---|---|---|---|

| *Bloques* | *1ª C* | *2ª C* | *1ª C* | *2ª C* | *1ª C* | *2ª C* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *conti 0* | *28* | *3* | *6* | *0* | *20* | *2* |
| *conti 1* | *43* | *23* | *31* | *3* | *38* | *15* |
| *disconti 1* | *19* | *13* | *30* | *18* | *23* | *14* |
| *conti 2* | *4* | *35* | *9* | *23* | *6* | *30* |
| *disconti 2* | *5* | *17* | *17* | *21* | *10* | *19* |
| *disconti 3* | *1* | *9* | *7* | *35* | *3* | *20* |

*Figura 1*. Imagen gráfica de los bloques conti - disconti (1ªC-2ªC)

CONTI 0 (20% - 2%)

[Insertar fig1.tif]

CONTI 1 (38% - 15%)

**[insertar Fig2.tif]**

CONTI 2 (6% -30%)

**[insertar fig3.tif]**



DISCONTI 1 (23% - 14%)

[insertar fig4.tif]

DISCONTI 2 (10% - 19%)

[insertar fig5.tif]

DISCONTI 3 (3% - 20%)

**[insertar fig6.tif]**

Los bloques de la 1ª C más significativos son conti 0, conti 1 y disconti 1 (20%, 38% y 23%) que representan el 81% del total. Los bloques más significativos en 3º son conti 0, conti 1 y disconti 1, mientras en COU son conti 1, disconti 1 y disconti 2.

Los bloques de la 2ª C más significativos son conti 2, disconti 2 y disconti 3 (30%, 19%, 20% respectivamente) que representan el 69% del total. Los bloques más significativos en 3º son conti 1, conti 2 y disconti 2, mientras en COU son disconti 1, conti 2, disconti 2 y disconti 3.

## 4.2 Descripción de la evolución. Bloques de salida y bloques de llegada

La evolución de cada uno de los bloques conti - disconti se refleja en los datos siguientes:.

*Tabla 2*. Frecuencias de evolución de los bloques (%)
(Columnas: Bloques de la 2ª construcción  Filas: Bloques de la 1ª Construcción)

| *1ªC \ 2ª C* | *c0* | *C1* | *d1* | *c2* | *d2* | *d3* | *tot* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *conti 0* | *0* | *6* | *4* | *6* | *2* | *1* | *20* |
| *conti 1* | *0* | *7* | *4* | *16* | *7* | *4* | *38* |
| *discon 1* | *0* | *2* | *3* | *5* | *6* | *7* | *23* |
| *conti 2* | *0* | *0* | *1* | *2* | *1* | *2* | *6* |
| *discon 2* | *0* | *0* | *2* | *1* | *2* | *4* | *10* |
| *discon 3* | *0* | *0* | *0* | *0* | *1* | *2* | *3* |
| *tot* | *2* | *15* | *14* | *30* | *19* | *20* | *100* |

Los bloques de la 1ª C más significativos son conti 0, conti 1 y disconti 1 (20%, 38% y 23%) y constituyen lo que llamamos **salida mayoritaria** (81%).

Los bloques de la 2ª C más significativos son conti 2, disconti 2 y disconti 3 y constituyen lo que llamamos **llegada mayoritaria** (69% del total).

Los bloques que constituyen la salida mayoritaria y llegada mayoritaria en la evolución 1ª C a 2ª C son distintos, lo cual nos permite una nueva clasificación de los bloques principales en función de los dos momentos de la obtención de datos (1ª C y 2ª C). Así distinguimos unos bloques que denominamos "bloques de salida": conti 0, conti 1 y disconti 1 y otros que denominamos "bloques de entrada o llegada": conti 2, disconti 2 y disconti 3. La evolución de unos y la procedencia de los otros se presenta en gráficos de sectores (véase la Fig. 2 y Fig. 3).

Cabe destacar que mientras el 81% del alumnado forma parte de los bloques de salida, el 19% restante, realiza una 1ªC que no pertenece a la salida mayoritaria.

Por otra parte, mientras el 69% del alumnado forma parte de los bloques de llegada, el 31% no pertenece a los llamados bloques de llegada o sea, en la 2ª C todavía construye como en la 1ª C. Con ello, no queremos decir que no haya evolucionado sino que lo ha hecho pero sin entrar en lo que llamamos llegada mayoritaria (por ejemplo un conti 0 que pasa a conti 1 o un conti 1 que pasa a disconti 1, o bien de una construcción a otra dentro del mismo bloque etc.). También tenemos regresiones, pocas y casi siempre cambiando por lo menos de continuo a discontinuo.

*Figura 2.* Gráficos de sectores de la salida mayoritaria (81%)
Evolución de los bloques de salida: conti 0 (20%), conti 1 (38%) y disconti 1 (23%)

**[insertar fig7.tif]**

[insertar fig8.tif]

[insertar fig9.tif]

*Figura 3.* Gráficos de sectores de la llegada mayoritaria (69%)
Procedencia de los bloques de llegada: conti 2 (30%), disconti 2 (19%) y disconti 3 (20%)

[insertar fig10.tif]

[insertar fig11.tif]

[insertar fig12.tif]

### 4.3 Los bloques atendiendo a la continuidad y a la utilización de prototipos

Para analizar la continuidad y la utilización de prototipos de las construcciones hemos organizado los datos atendiendo a la continuidad de los bloques (véase la Tabla 3), al tipo de prototipos utilizado en los bloques (véase la Tabla 5) o simplemente a la utilización o no de prototipos (véase la Tabla 4).

*Tabla 3.* De la continuidad o discontinuidad
(Columnas: Bloques de la 2ª construcción. Filas: Bloques de la 1ª construcción)

| *Tercero* | *con* | *dis* | *tot* |
|---|---|---|---|
| *Conti* | *53* | *23* | *75* |
| *Disconti* | *7* | *17* | *25* |
| *Total* | *60* | *40* | *100* |

| *COU* | *con* | *dis* | *tot* |
|---|---|---|---|
| *conti* | *15* | *31* | *46* |
| *disconti* | *11* | *43* | *54* |
| *total* | *26* | *74* | *1 00* |

| *TOTAL* | *con* | *dis* | *Tot* |
|---|---|---|---|
| *conti* | *38* | *26* | *64* |
| *disconti* | *9* | *28* | *36* |
| *total* | *47* | *53* | *100* |

La tabla anterior nos muestra que hay diferencias significativas entre la 1ª C y la 2ª C y entre los niveles de 3º y COU sobre todo en la 2ª C si consideramos la continuidad de los bloques. Mientras en la 1ª C, el 64% del total de los gráficos son continuos (75% en 3º, 46% en COU), en la 2ª C, lo son el 47% del total (60% en 3º, 26% en COU). Observamos que en el paso de la 1ª C a la 2ª C hay una tendencia a mantener la continuidad (los conti de la 1ª C continúan siendo conti en la 2ª C en un 60%) y todavía más, la no continuidad (los disconti de la 1ª C continúan siendo disconti en la 2ª C en un 76%).

*Tabla 4*. Los bloques desde el punto de vista de la utilización o no de prototipos

| *Tercero* | *si p* | *no p* | *Tot* |
|---|---|---|---|
| *si prot* | *70* | *24* | *94* |
| *no prot* | *3* | *3* | *6* |
| *tot* | *73* | *27* | *100* |

| *COU* | *si p* | *no p* | *tot* |
|---|---|---|---|
| *si prot* | *38* | *38* | *76* |
| *no prot* | *5* | *19* | *24* |
| *tot* | *43* | *57* | *100* |

| *TOTAL* | *si p* | *no p* | *tot* |
|---|---|---|---|
| *si prot* | *57* | *30* | *87* |
| *no prot* | *4* | *9* | *13* |
| *tot* | *61* | *39* | *100* |

La tabla anterior nos muestra que hay diferencias significativas entre la 1ª C y la 2ª C y entre los niveles de 3º y COU sobre todo en la 2ª C si consideramos la utilización o no de prototipos. Mientras en la 1ª C, el 87% del total (94% en 3º, 76% en COU) utiliza prototipos, en la 2ª C lo hace el 61% del total (73% en 3º, 43% en COU). Observamos que en el paso de la 1ª C a la 2ª C hay una tendencia a mantener la utilización y todavía más la no utilización de prototipos (los que utilizaban prototipos en la 1ª C, continúan utilizándolos en la 2ª C en un 66% y los que no los utilizaban en la 1ª C, continúan no utilizándolos en la 2ª C en un 70% ).

*Tabla 5.* Los bloques desde el punto de vista del tipo de prototipos utilizado.
c0c1 = pp (prot. primarios) / d1c2 = ps (prot. secundarios) / d2d3 = np (no prototipos)

| *Tercero* | *pp* | *ps* | *np* | *tot* |
|---|---|---|---|---|
| *c0c1* | *21* | *37* | *13* | *71* |
| *d1c2* | *3* | *8* | *11* | *23* |
| *d2d3* | *1* | *3* | *3* | *6* |
| *Tot* | *25* | *48* | *27* | *100* |

| COU | pp | ps | np | tot |
|---|---|---|---|---|
| c0c1 | 2 | 18 | 17 | 37 |
| d1c2 | 1 | 17 | 21 | 39 |
| d2d3 | 0 | 6 | 18 | 24 |
| tot | 3 | 41 | 56 | 100 |

| TOTAL | pp | ps | np | tot |
|---|---|---|---|---|
| c0c1 | 12 | 27 | 15 | 54 |
| d1c2 | 2 | 13 | 16 | 31 |
| d2d3 | 1 | 4 | 10 | 15 |
| tot | 14 | 45 | 41 | 100 |

La tabla anterior nos muestra que hay diferencias significativas entre la 1ª C y la 2ª C y entre los niveles de 3º y COU sobre todo en la 2ª C si consideramos el tipo de prototipo utilizado o la no utilización de prototipos. Mientras en la 1ª C, el 54% del total (71% en 3º, 37% en COU) usa prototipos primarios y el 31% (23% en 3º, 39% en COU) utiliza prototipos secundarios; en la 2ª C, el 14% (25% en 3º, 3% en COU) hace uso de prototipos primarios y el 45% (48% en 3º, 41% en COU) utiliza prototipos secundarios. Observamos que en el paso de la 1ª C a la 2ª C hay una tendencia a mantener el tipo de prototipo utilizado y todavía más la no utilización de prototipos (los que acudían a prototipos primarios en la 1ª C, continúan utilizándolos en la 2ª C en un 24%, los que recurrían a prototipos secundarios en la 1ª C, continúan utilizándolos en la 2ª C en un 37% y los que no los utilizaban en la 1ª C, continúan no usándolos en la 2ª C en un 70%).

En resumen y concluyendo, de los datos presentados se desprende que tanto en la continuidad o discontinuidad de los gráficos como en la utilización de prototipos, hay diferencias significativas cuando nos referimos a 3º y a COU, o a la 1ª C y a la 2ª C. Las tablas anteriores nos muestran que mientras al inicio de 3º nos encontramos con una continuidad del 75% y una utilización de prototipos del 94% (en un 54% primarios), estos porcentajes pasan a ser del 26% y del 43% (solo un 14% de primarios) respectivamente, a finales de COU

## 5. DISCUSIÓN

### 5.1 Sobre la consistencia y coherencia de las construcciones

Una aportación *enriquecedora* para nuestro trabajo fue la intervención de una asistente a la exposición que de él, realizamos en la Relme 11. Se nos preguntó acerca de la estabilidad y validez de las respuestas del alumnado, es decir, acerca de la solidez, consistencia y coherencia de las construcciones que presentábamos como respuestas del estudiantado a la tarea de construcción esto nos llevó a comentar hasta qué punto dichas producciones eran defendidas, es decir, hasta dónde el correspondiente alumno y alumna se reafirmaba o cambiaba de opinión, lo cual nos podía dar una indicación del grado en que sus realizaciones respondían de alguna manera a unas ideas consolidadas.

Son las entrevistas la herramienta básica para contestar a dicha pregunta a través de ellas hemos podido averiguar hasta qué punto uno alumno o alumna está convencido de su construcción y dispuesto dispuesta a defenderla. Cabe destacar que las formas que responden a gráficos standard son más consistentes, así ocurre especialmente con conti 1 (parábola), conti 2 (cúbica) y disconti 2 (parábola + hipérbola,...) lo cual es bastante significativo si tenemos en cuenta que estos tres bloques suponen el 54% en la 1ª C y el 64% en la 2ª C. Globalmente, podríamos decir que esta consistencia abarca con seguridad más de los 2/3 de las construcciones y son conti 0 y disconti 1 las más inestables por ser los primeros estadios en la continuidad y en la discontinuidad respectivamente, y por corresponder a alumnado con un bagaje muy limitado sobre el tema, que fácilmente puede modificar sus argumentos.

Mostramos a continuación un trozo íntegro de entrevista que aunque reconociendo errores, estos son defendidos:

ALBERTO 3º BUP edad 17 años. Segunda entrevista CONSTRUCCIÓN de las condiciones 2ª, 3ª, 4ª y 5ª

La entrevistadora (E) es la conductora de las preguntas de la entrevista, pero no ha de ser la conductora de las respuestas:

E- El punto (-2,0) es un máximo relativo
A- Lo de relativo ¿es por qué hay más?
E- No es forzoso, en este caso la última frase dice que sí pueden haber otros
A- Hay en el -2 y un mínimo lo añado yo en el 0 (en realidad el alumno dibuja un máximo en el punto (-2,0) y un mínimo en (0,-4)),

E- Vamos a ver si con la 3ª y 4ª condición acabas de ver claro dónde se pueden poner máximos y dónde mínimos.

(La entrevistadora lee la 3ª y 4ª condición y el alumno muy decidido va desde el máximo en (-2,0) a (0,-oo)y desde (0,+oo) dibujando un mínimo en el punto de corte (1,0) va a (2,+oo): Sobreponiendo las ramas de hipérbola al trozo de cúbica que ya había dibujado al unir el máximo con el mínimo inventado en x=0)

E- No te parece que has puesto muchas líneas
A- Sí pero es que hay muchas condiciones y una, son para los máximos y mínimos y las otras paras los infinitos
E- Bien, pues todavía tenemos otro $\infty$
A- Pues entonces habrá otras hipérbolas.

Quinta condición:

E- La curva tiende a 0 cuando *x* tiende a $+\infty$ y a $-\infty$
A- Pues no puedo porque no puedo tender a cero si tengo que dejar el máximo y el mínimos. ¿o si puedo?
E- ¿A tí que te parece?
A- Que puedo ir de $-\infty$ a $-\infty$ por abajo y dejar todo lo demás y después ir de $+\infty$ a $+\infty$
E- Bien, tu decides
A- Claro que sí, puedo hacer esto
(el alumno traza dos ramas de hipérbola que van de ($-\infty$,0) a (0, $-\infty$) y de (0, $+\infty$) a ($+\infty$,0) dejando la cúbica que ya tenía dibujada)
E- ¿Y te parece que esto representa una función?
A- No. Pero no puedo derivar y tengo que dibujar los máximos y mínimos
E- ¿Qué tiene que ver el ser función con derivar?
A- Que la derivada es la función que da los máximos y mínimos.
E- ¿Estas seguro de lo que has dibujado?
A- Hasta que me den la fórmula sí, pero eso de que sea función sólo sé hacerlo con derivadas y entonces sólo sale la línea de la función y no tantas como aquí.
E- Y que te parece lo que dibujaste a principio de curso? (un segmento conti0)
A- Pues que al comienzo no sabía nada del $\infty$ ni tampoco de los máximos y los mínimos, pero ya sabía que por dos puntos pasa siempre una recta.
E- ¿Y en tu 2ª construcción?(una cúbica conti2)
A- Sí sabía lo del $\infty$, solo que me hacía y todavía me hago un lío con el máximo que también es un valor límite y juntos los he puesto ahora pero mal porque no me dan la fórmula.

La entrevista finaliza sin poder preguntarle por el aspecto global de las condiciones. Parece ser que la entrevista ha forzado la situación y ha aclarado que dibujan aquello de lo que están razonablemente seguros y que encaja con la imagen conceptual que tiene de gráfico, pero eso no vincula la definición del concepto para verificar si es la gráfica de una función o no.

## 5.2 Sobre la distinción entre la utilización o no de prototipos y la continuidad o discontinuidad

En las entrevistas, parte del alumnado explica una de las construcciones del bloque disconti2 (véase la Fig. 4) como la unión de dos parábolas que miran hacia abajo o de una parábola y media hipérbola. Desde este punto de vista, en dicha construcción utiliza prototipos secundarios iguales o más pobres que la construcción del bloque continuo conti 2 (Fig 5) considerada como la unión de dos parábolas y una rama de hipérbola o bien dos parábolas y una hipérbola entera. Análogamente, desde el punto de vista de la continuidad, el uso de hipérbolas poco responde a una conti 2, lo cual es un ejemplo de la dificultad que nos ha supuesto (y que hubiera sido imposible sin la ayuda de las entrevistas), distinguir, no sólo si se utilizan prototipos o no, sino también entre la continuidad o no continuidad de un gráfico.

disconti 2 (*Fig. 4*)

**[insertar fig13.tif]**

conti 2 (*Fig. 5*)

[insertar fig14.tif]

¿Hasta qué punto la construcción de la Figura 4 puede considerarse de categoría superior a la de la Figura 5? En caso afirmativo es por el hecho de ser discontinua, o bien ¿debe ser considerada de categoría inferior por el hecho de utilizar prototipos primarios?

Las respuestas a preguntas como las anteriores han resultado ser una tarea difícil y compleja. La situación que acabamos de presentar no es más que un ejemplo de los muchos casos a los que nos hemos tenido que enfrentar y dar solución.

Mostramos a continuación un trozo íntegro de entrevista para destacar el dilema que supone hacer frente a la siguiente pregunta ¿los prototipos ayudan o no?

RAFAEL 3º BUP. Segunda Entrevista. Su primera construcción era conti1 y ahora disconti2 (véase la Figura 5). En la entrevista se le muestra una disconti3 que es como su ultima construcción, pero con un mínimo al comienzo y sin la 2ª asíntota.

E- ¿Esta función presenta algún mínimo?
R- Tiene uno en (-4,-1).
E- ¿Por qué?
R- Es el punto más bajo de la parábola.
E- ¿Y si comparas con este otro? (señalo cerca de la asíntota)
R- Sí, quizás sea más bajo pero no es un mínimo.
E- ¿Por qué?
R- Pues no recuerdo una definición de mínimo, y no sé como decirlo.
E- ¿Y de máximo?
R- De máximo sí que la recuerdo, se crece hasta el máximo y después decrece.
E- ¿Y de mínimo?
R- Sí claro ahora sí, decrece hasta el punto mínimo y después crece hasta el punto máximo.
E- ¿Y si no hubiera máximo, podría haber mínimo?
R- Sí, porque hay **parábolas solas**, como las de antes, con un punto mínimo, pero ahora van **combinadas**.
E- ¿Qué quieres decir como antes?
R- Antes de verlo este curso en clase.
E- ¿Qué quieres decir con combinadas?
R- Que están juntas, una para arriba y otra para abajo
E- Bien, y ¿dónde están estos combinados?
R- No, si solo hay uno en -2, porque después está la asíntota y se para.
E.- ¿Qué es lo que se para?
R.- Bueno, nada, porque **la asíntota sólo separa parábolas**, por eso después viene otra parábola.

Lo cierto es que nuestro entrevistado se mueve en un mundo de parábolas que le permite explicar y hacer lo que hace. Por lo tanto los prototipos le ayudan pero a la vez se convierten en una barrera para un avance significativo.

### 5.3. Sobre el Marco afectivo y Matemática construible socialmente

Dentro del **modelo de desarrollo afectivo y cognitivo** de Evelyn Fox Keller (1991), para entender las interconexiones entre cognición y afecto se necesita disponer de una concepción más completa y detallada donde la realidad del objeto adquiera un carácter dinámico que posibilite la existencia de una ciencia liberada de vinculaciones genéricas. La vinculación de científico y objetivo con masculino traen consigo que lo que es denominado femenino resulte devaluado por privarle del valor intelectual y social que se adjudica a la ciencia, estableciéndose un proceso circular y maléfico de refuerzo mutuo. Como señala esta autora, entendemos Fabra (1997), que una ciencia sin género requiere de unas transformaciones que sitúen todas las pretensiones de hegemonía intelectual (más políticas que científicas) en su lugar adecuado; una ciencia sana que permita la supervivencia de la diferencia productiva, que nos conduzca a la **Matemática Posibilista** (Fallibilist), corregible, revisable, constructible socialmente (Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics) de Paul Ernst (1997), sin olvidar los valores y la responsabilidad social propias de esta disciplina. Dentro de esta línea de actuación se sugieren diferentes estrategias y tipos de tareas donde los valores femeninos (relaciones, conexiones, intuición, cooperación,...) quedan claramente explicitados y buscan un equilibrio, no excluyente, con los valores masculinos implícitos (reglas, abstracción, separación, análisis, competición,…)

## 6. CONCLUSIONES

### 6.1 Sobre la evolución 1ª C a 2ª C

Del análisis presentado se desprende lo arraigada que está la utilización de prototipos continuos, práctica, a nuestro entender, ocasionada en gran parte por una enseñanza, que da prioridad a determinadas técnicas frente a otras, cuando se trata del trazado del gráfico de una función, como muestran los datos obtenidos en este trabajo.

**6.1.1.** En relación con la evolución 1ª C a 2ª C, los bloques de la 1ª C más significativos son conti 0, conti 1 y disconti 1 (20%, 38% y 23%) que constituyen la salida mayoritaria (81%). Por otra parte en los bloques de la 2ª C son conti 2 y disconti 2 y 3 (30%, 19% y 20%); quienes definen la llegada mayoritaria (69%).

La distribución de los seis bloques conti disconti en bloques de salida y bloques de llegada es posible ya que son distintos. Cabe destacar que el 31% que en la 2ª C todavía construye como en la 1ª C no quiere decir que no haya evolucionado, sino que lo ha hecho pero sin llegar al nivel de lo que llamamos llegada mayoritaria (así un conti 0 que pasa a conti 1 o un conti 1 que pasa a disconti 1, etc.).

**6.1.2.** Para analizar la continuidad y la utilización de prototipos de las construcciones, hemos organizado los datos atendiendo a la continuidad de los bloques, al tipo de prototipos utilizado en los bloques o simplemente a la utilización o no de prototipos. Hemos obtenido:

a) En relación con la continuidad en la 1ª C ésta es del 64% y en la 2ª C del 47%.

b) En relación con los prototipos en la 1ª C, el 54% utiliza prototipos primarios y el 31% utiliza prototipos secundarios y el 13% no utiliza prototipos. En la 2ª C, los porcentajes son el 14%, el 45% y el 41% respectivamente.

**6.1.3.** De los datos analizados se desprende que tanto en la utilización de prototipos o el tipo de prototipo utilizado, como en la continuidad o discontinuidad de los gráficos hay diferencias y en el mismo sentido, cuando nos referimos a 3º o a COU y a la 1ª C o a la 2ª C. A grandes rasgos, hay tanta continuidad en 3º en la 1ª C, como discontinuidad en COU en la 2ª C y tanta continuidad en la 2ª C en 3º, como discontinuidad en la 1ª C en COU. Hay tantos alumnos en la 1ª C que no utilizan prototipos, como estudiantes que en la 2ª C utilizan prototipos primarios, lo mismo ocurre entre el alumnado de 3º en la 1ª C que no recurre a prototipos y el alumnado de COU que en la 2ª C utiliza prototipos primarios.

Cabe añadir, finalmente, que aproximadamente los dos tercios de alumnos tanto de "salida" continua como de "salida" discontinua se mantienen en su continuidad o discontinuidad pero siempre mayoritariamente dentro del progreso.

### 6.2. Sobre los errores

En el capítulo de errores destacaremos, como ya hemos señalado en otras investigaciones (Fabra, 1995, 1997 y y Fabra-Deulofeu, 1996), que en edades de 16-18 años al aumentar la complejidad del gráfico reaparecen dificultades detectadas (Deulofeu, 1993) en edades más tempranas de 12-14 años, los más relevantes son:

Construcción de elementos esencialmente sobre el eje de las *x*. Desconocimiento del significado de términos. Confusión en la asignación de ejes. Focalización en puntos y en intervalos alrededor de un punto. Aplicación incorrecta de conocimientos anteriores. Gráficos que responden a una lectura parcial. Tendencia a la continuidad y a la utilización de prototipos. Confusión entre recta tangente en un punto y recta secante. Confusión entre pendiente de la recta tangente y de la recta secante (Azcárate, 1990). Confusión entre tasa de variación y tasa media de variación (Jiménez, 1995).

En relación con los gráficos cartesianos, una de las prácticas más comunes en la clase de Matemáticas consiste en el uso desproporcionado de determinados procedimientos, como la construcción de gráficos a partir de una fórmula por métodos analíticos (derivadas) y a partir del estudio de unos modelos elementales (prototipos primarios continuos como rectas y parábolas) muy concretos, frente a otros, como la tarea de construcción del gráfico de una función a partir de condiciones dadas en forma verbal presentada en este trabajo. Por otra parte, si tenemos en cuenta que las realizaciones del alumnado están condicionadas y tienen una relación directa con la práctica reiterada y preponderante de determinados procedimientos. La continuidad y la utilización de prototipos pueden llegar a constituirse en obstáculos cognitivos.

Errores como el empalme de trozos de gráficos distintos para satisfacer cada condición por separado y gráficos que no representan una función, responden, en gran parte a una falta de capacidad por parte del alumnado por integrar y hacer compatibles las informaciones del enunciado. En concreto, el ver más de una función, y a las asíntotas como unas tendencias globales y no como aquello que pasa cuando nos acercamos al límite, crea, en la mayor parte de los casos, una disociación entre lo que ocurre con la variable independiente *x* y la variable dependiente *y* (el límite cuando *x* tiende a infinito sea cero se toma como dos tendencias: una al infinito de la *y* cuando *x* tiende a 0 y otra al 0 de la *y* cuando *x* tiende a infinito) que se materializa en las construcciones en gráficos que no representan una función.

## 6.3. Orientaciones didácticas: Estrategias

El hecho de que en el diseño del trabajo de investigación al que corresponde este artículo no se haya contemplado el control de la enseñanza recibida por el alumnado, hace que las consideraciones de las que se desprenden las consecuentes orientaciones didácticas que presentamos deben tomarse como un conjunto de reflexiones sugeridas por diversos comentarios y realizaciones del alumnado. Cabe entenderlas también como réplica a los errores detectados y a nuestra y otras experiencias docentes:

*Construcción de elementos esencialmente sobre el eje de las x. Confusión en la asignación de ejes*

Dibujar curvas o rectas, después añadir ejes cortando sin cortar, notar: ¿dónde están las diferencias? Hacer lecturas de puntos y describir el crecimiento y otras características.

*Desconocimiento del significado de términos.*

Los gráficos han de tener de todo muy pronto y ser descritos cualitativamente en detalle, haciendo que surjan distintas acepciones y términos.

*Focalización en puntos y en intervalos alrededor de un punto. Gráficos que responden a una lectura parcial.*
Insistir en la lectura-descripción izquierda-derecha y distinguir extremos locales y absolutos del caso de las tendencias asintóticas y otras discontinuidades.

*Aplicación incorrecta de conocimientos anteriores. Tendencia a la continuidad y a la utilización de prototipos.*

Rescatar conocimientos anteriores (rectas, parábolas,...) lo antes posible para la reconducción a nuestro esquema de trabajo. Es una buena ocasión para iniciarse en los movimientos de traslación y deformaciones gráficas e incluso en su efecto en las fórmulas.

*Gráficos que no representan una función. El ver más de una función. El empalme de trozos de gráficos distintos para satisfacer cada condición por separado.*

Desarrollar capacidades en el alumnado que le permitan integrar y hacer compatibles las informaciones de un enunciado complejo, haciendo un trabajo previo de representación de las condiciones consideradas no como desglose. Tampoco se trata de desconcertarlos prematuramente, pero sí de crear paulatinamente situaciones de conflicto, desde funciones definidas a trozos a racionales complejas, pasando por las irracionales, exponenciales logarítmicas, trigonométricas, evitando fórmulas.

Una disociación entre lo que ocurre con la variable independiente $x$ y la variable dependiente. Las asíntotas como unas tendencias globales y no como aquello que pasa cuando nos acercamos al límite.

Las actividades de asignación de gráficos a descripciones verbales de características funcionales y en algunos casos a fórmulas, permiten un tratamiento del comportamiento tendencial que obvia en parte disociaciones como las siguientes: el límite cuando $x$ tiende a infinito sea cero se toma como dos tendencias: una al infinito de la $y$ cuando $x$ tiende a 0 y otra al 0 de la $y$ cuando $x$ tiende a infinito.

Para detectar mejor la incidencia de estos y otros errores y de acuerdo con nuestra opción de enseñanza, nos hemos decantado por un enunciado en forma verbal para obtener un gráfico.

Entendemos, no obstante, que como cada lenguaje privilegia unos aspectos determinados, el conocimiento de los distintos lenguajes, utilizar más de un lenguaje a la vez y hacer el paso de un lenguaje a otro (interpretación, construcción, fórmula ...), enriquece las concepciones del alumnado en relación al concepto de función. Queremos señalar también los beneficios que comporta que una parte de las actividades de aprendizaje consista en actividades de traducción en el sentido de Janvier (1987), cuestión ya citada en el apartado del marco teórico y a lo largo de este apartado.

Los resultados obtenidos en el tema que nos ocupa, refuerzan plenamente la orientación didáctica de dar una información sobre funciones lo antes posible dentro de la enseñanza secundaria, para poder realizar un trabajo cualitativo previo a la enseñanza formal, imprescindible para una verdadera adquisición de los conceptos. Aún en edades 16-18 proponemos abordar el tema de funciones, revisando sus características cualitativamente, evitando o, como ha sido en el caso presentado en este artículo, modificando mediante la activación a través de la enseñanza, unas capacidades personales del alumnado reprimidas por manipulación de un único tipo de actividades, que en síntesis les decían: *" no tenemos función sino tenemos fórmula, ni gráfico sin tabla de valores, ni máximos sin derivadas, ni tendencias sin teoría de límites...".* En resumen, pensamos que se debe huir de todo aquello que no permita al alumnado y profesorado involucrarse en **un proceso creador**, de aquí nuestra preferencia por la palabra *construcción* frente a otras. Esperemos que la implantación de la Reforma Educativa en nuestro país nos haga más sensibles a esta problemática, se hagan más viables los enfoques propuestos y signifique una alternativa positiva de actuación del profesorado hacia la mejora de la enseñanza y el aprendizaje

En concreto: cabe añadir a lo citado, que en lo que se refiere a la enseñanza y el aprendizaje:

### 6.3.1. En el currículum

Es imprescindible *cambiar* la imagen pública de las matemáticas. Pasar de la imagen tradicional y absolutista a la social y posibilista. Lo difícil y lo prohibido se hace accesible; lo frío, abstracto, neutro e impersonal se humaniza y personaliza; a lo teórico se le añade o superpone lo práctico y a los factores ultrarracionales, los factores reales, Las matemáticas son importantes ya no porque “tienen algo” sino porque son *accesibles* a todas y a todos, porque *motivan* a todas y a todos. Nosotros nos limitaremos a citar algunos aspectos del curriculum en acción que se ocupa de intenciones, diseño, planeamiento y desarrollo expreso.

### 6.3.2. En la práctica docente

La ansiedad al enseñar provoca aversión. La rapidez va en contra de la calidad, lo cual no significa que estemos en desacuerdo con la evolución, *el cambio*, la incertidumbre y el reconocimiento de los errores. Es conveniente que el profesorado se plantee con el alumnado la resolución de conflictos que vienen apareados con las situaciones nuevas. Polya, (1957) dice que a su entender, el único método de enseñanza efectiva y significativa: *"Deja que los estudiantes hagan conjeturas antes de que tú les des apresuradamente la solución; déjales averiguar por sí mismos tanto como sea posible; deja a los estudiantes que hagan preguntas; déjales que den respuestas. A toda costa evita responder preguntas que nadie haya preguntado, ni siquiera tú mismo."*

### 6.3.3. En los materiales

Por todos los motivos expuestos el profesorado debe plantearse de manera crítica su actuación, pero a la vez, debe implicarse en la elaboración y selección de las herramientas pedagógicas necesarias. La confección de materiales curriculares adecuados es un reto que se suma a los ya mencionados y que podemos compartir con el alumnado. El abanico debe ser lo suficientemente amplio, atractivo, ligado al sentido común y que consolide ciertas capacidades básicas, a saber, generalizar, abstraer, hacer hipótesis y someterlas a prueba, hacer frente a situaciones nuevas con la confianza de comprenderlas y llegar a resolverlas.

## 6.4. Indicaciones finales

Este trabajo pone de relieve que el análisis de procesos de construcción a través de las respuestas del alumnado a la misma tarea de construcción en momentos distintos de su aprendizaje, constituye una herramienta potente para llegar a un conocimiento más profundo de la evolución de las producciones del alumnado y nos hace pensar en las posibilidades que puede ofrecernos para futuras investigaciones, en concreto, para el estudio de la evolución de las concepciones del alumnado, (Artigue, 1990). Tenemos indicios de la evidencia de la afirmación anterior en investigaciones realizadas (tesis de maestría y otros trabajos de Fabra citados en la bibliografía), apoyándonos en tareas paralelas de interpretación del mismo gráfico, al constatar que la evolución de las construcciones lleva consigo, o mejor dicho, proviene de una evolución similar en las interpretaciones, estando cada vez más cerca de la evolución de las concepciones.

Finalmente hay que añadir que a este trabajo se le puede dar la vuelta, pero lo presentamos como ha surgido de la individualidad a la generalidad, reduciendo las 2x250 construcciones a dos grandes bloques: uno continuo y otro discontinuo o bien a uno que utiliza prototipos, ya sean primarios o secundarios y otro que no los utiliza, puesto que nos habíamos planteado ver qué pasaba y no ir a presenciar si algo concreto pasaba, prescindiendo de esquemas previos de interpretación de resultados, a pesar de que teníamos conocimiento de algunas formas generales de actuación del alumnado que habíamos obtenido a través de la literatura sobre el tema, a partir de otros estudios previos a este y fundamentalmente de nuestra propia experiencia docente de cerca de 25 años en secundaria, pero a la vez, desconocíamos qué había detrás de determinadas producciones o realizaciones.

Por otra parte, este trabajo ha permitido ubicarnos en el modelo docente, al utilizar algunos de sus argumentos y estrategias para intentar localizar los obstáculos que favorecen la instauración de dificultades y vías de salida erróneas a la hora de efectuar una tarea determinada. Cabe mencionar que no sólo se investigan las dificultades y los porcentajes en que estas se presentan, sino que se intenta ir mas allá: *en busca del uso que hace el alumnado de los conceptos*, observando sus producciones y leyendo a través de sus razonamientos. Pensamos, que analizando con detalle y desde distintos ángulos el uso de los conceptos, podemos encontrar las concepciones que el alumnado tiene de estos.

Para terminar citemos, que en el enunciado del test de construcción, réplica de una propuesta de las PAAU, que pretendía con su redacción poner en igualdad de condiciones al alumnado con y sin calculadoras gráficas, pone en evidencia la necesidad de pensar en que supone su existencia en lo que se refiere a la enseñanza y el aprendizaje: una adecuación de las propuestas didácticas con una reformulación de objetivos, metodología y análisis de resultados acorde con la utilización de graficadores, computadoras, etc.

La utilización de graficadores, computadoras, etc., supone una adecuación de las propuestas didácticas con una reformulación de objetivos, metodología y análisis de resultados. Las implicaciones abren paso a una nueva actitud de investigación relacionada quizás con la ingeniería didáctica.

Las calculadoras con capacidad para construir gráficas favorecen el estudio del carácter global de las funciones, operaciones de funciones, derivadas y primitivas, y la resolución de ecuaciones diferenciales Cordero & Solis, (1996)

## 7. BIBLIOGRAFÍA


Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 10 (2-3), 241-286.

Artigue, M., Douady, R. & Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (Gómez, P., Ed.). Bogotá, Colombia: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción a la derivada*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Balacheff, N. & Laborde, C. (1988). Social interaction for experimental studies of pupil's conceptions: Its relevance for research in didactics of mathematics. En HG Steiner, et al (Eds), *Proceeding II TME Univ Bielefeld. Univ Antwerpen*, 189-195.

Cantoral, R. (1995). Matemática Educativa. *Pedagogía: Revista especializada en Educación.* Tercera Época. 10 (5), 5-13. México: Universidad Pedagógica Nacional.

Cantoral, R. & Reséndiz, E. (1996). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo. Cuadernos Didácticos: Vol. I*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. & Solís, M. (1996). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo. Cuadernos Didácticos: Vol. 2*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Deulofeu, J. (1993). *Els grafics cartesians de funcions: Un estudi de les concepcions dels alumnes centrat en el significat del gràfic*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematics and Cognition*. *ICMI Study Series* (pp. 113-134). Cambridge: Cambridge University Press.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E., Schwingendorf, K. & Mathyews, D. (1995). *Calculus. Concepts and Computer*. (2a. ed.). New York, NY, EE. UU.: McGraw-Hill.

Ernst, P. (1997). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. New York, EE. UU.: Suny Press.

Fabra, M. (1995). *Gràfics Cartesians de Funcions: interpretació i construcció d'extrems*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Fabra, M & Deulofeu, J. (1996a). Function and graphs: relationships between interpretation and construction in secondary student (16-18 years old). En *Actas PME - 20*, Vol. I. Valencia, España.

Fabra, M & Deulofeu, J. (1996b). Funciones y Gráficas: Relaciones en el binomio Interpretación Construcción en el alumnado de 16 a 18 años. *ICME – 8*, Sevilla, España.

Fabra, M. (1997). Funciones y Gráficas. Género y Coeducación. *Actas de las II Jornadas sobre matemáticas y coeducación* (pp. 61-74, 153-155). Madrid, España.

Farfán, R. M. (1995). Ingeniería Didáctica. *Pedagogía: Revista especializada en educación*. Tercera Época. 10(5), 14-23. México: Universidad Pedagógica Nacional.

Farfán, R. M. & Albert, A. (1996). *Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades. Cuadernos Didácticos: Vol. 3*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fox Keller, E. (1991). *Reflexiones sobre género y ciencia*. Valencia, España: Ediciones Alfons el Magnanim.

Gomez, P. & Perry, P. (Eds.). (1996). *La problemática de las matemáticas escolares*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Harel, G. & Dubinsky, E. (Eds.). (1992). *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* Washington, DC., EE. UU.: Mathematical Association of America.

Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt. (Ed.), *Didáctica XX Aniversario. Investigaciones en Matemática Educativa.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F. (1995, abril). Intuición Primera versus pensamiento analítico: Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Educación Matemática, 7* (1). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representating situations*. Tesis Doctoral no publicada, University of Nottingham.

Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of representation in the teaching and learning Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Jiménez, C. (1995). *Gràfics Cartesians de Funcions: Taxes de variació en un interval*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Leinhardt, et al. (1990). Functions, Graphs and Graphing: Tasks. *Learning and Teaching Review of Educational Research*, 60 (1), 1-64.

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy.* Washington, DC., EE. UU.: Mathematical Association of America.

Polya, G. (1957). *Cómo plantear y resolver problemas* (Traducción castellana, 1965). México: Trillas.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking processes*. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publisher.

Tall, D. (1991). Intuition and rigor: the role of visualisation in the calculus. *Teaching and learning Mathematics,* (pp. 105-109). EE. UU.: Mathematics Association of America.

Tall, D. (1995) Cognitive Growth in Elementary and Advanced mathematical thinking. *A proceedings PME,* Brasil.

Tall, D. (1996a). Information Technology and Mathematics Education: Enthusiasms, Possibility and Realities thinking. *ICME-8* Sevilla, España.